Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A(2 , 2 , -1) , le plan (P) : $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon R = 3

0,75 — 1) a) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation de la sphère (S) est vérifier

0,75 — que $A\in S$

0,75 — b) Calculer la distance du point $\Omega(1,0,1)$ au plan (P), et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

2) Soit (D) la droite passant par le point A et orthogonale au plan (P)

0,75 — a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(2,1,2)$ dirige la droite (D) et que (6 , -6 , -3) est le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$

b) Calculer $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point A

Exercice 2 (3 points) :

1 — 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-6z+25=0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A , B , C et D d'affixes respectives : $a=3+4i$, $b=3-4i$, $c=2+3i$ *et* $c=5+6i$

0,5 — a) Calculer : $\dfrac{d-c}{a-c}$. et en déduire que les points A , C et D sont alignés

0,5 — b) Montrer que : $p=3+8i$ est l'affixe du point P image de A par l'homothétie H de centre B et

1 — de rapport $\frac{3}{2}$

c) Écrire sous forme trigonométrique le nombre $\dfrac{d-p}{a-p}$. Puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}})$ et que : $PA=\sqrt{2}PD$

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 7 boule noires et 2 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise, 2 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule blanches restantes dans l'urne après le tirage

0,5 — 1) Déterminer les valeurs possibles de X

1,5 — 2) Montrer que : $p(X=0)=\frac{1}{36}$ *et* $p(X=1)=\frac{7}{18}$

1 — 3) Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E(X)

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n}$

1 1) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n > 0$

1 2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$

1 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et écrire v_n en fonction de n

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$, puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 (2 points) :

1 1) Déterminer une fonction primitive de $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}\, dx = \frac{1}{2010}$

1 2) En intégrant par parties, Montrer que : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\, dx = 6\ln(3) - 2$

Exercice 6 (6 points) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2X}+1}\right)$

Et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm

0,5 1) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

1 b) Montrer que f est paire et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1 c) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ et en déduire que la droite (D) d'équation : $y = x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$

0,5 2) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D) sur $[0, +\infty[$

1 3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ et vérifier que $f'(0) = 0$

0,5 b) Vérifier que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{4x} - 1 > 0$ et en déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$

0,5 c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$

1 4) Tracer dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (C_f) (on admet que (C_f) admet deux points d'inflexions)